EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

III — 1 NOVEMBER 1966

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET ABC VAN DE MATRIXREKENING [1])

door

J. VAN IJZEREN

Eindhoven

§ 1. *Inleiding.*

Wie bij het gewone rekenen met getallen, of met letters die getallen voorstellen, eens let op de gebruikelijke schrijfwijzen en afspraken, krijgt stellig de indruk van een bijzonder praktisch geheel. Het spreekt ook wel vanzelf dat ondoelmatigheden in de loop der tijd zijn verdwenen. Een zwak punt is echter dat er met *individuele getallen* wordt gewerkt, terwijl de tegenwoordige praktijk steeds meer te maken heeft met getallenreeksen, tabellen e.d., die vragen om een gecoördineerde behandeling.

Vaak geeft een behoefte van de praktijk aanwijzingen voor theoretische mogelijkheden. Maar hier is de situatie andersom, want al meer dan honderd jaar geleden heeft de engelse wiskundige Cayley het ,,coördinerende rekenen" ontwikkeld in zijn Theory of Matrices.

Hij voert daar een soort ordelijkheid in die de capaciteit van het rekenen vergroot. In de plaats van getallen komen *getallenteams* die zeer terecht matrices zijn genoemd. Het woord matrix weerspiegelt nl. niet alleen de saamhorigheid der getallen — als letters in een matrijs — maar tevens hun gecoördineerde opstelling in rijen (d.w.z. regels) en kolommen.

Evenals bij getallen zijn er bij matrices sommen en produkten. Het optellen van matrices wordt echter pas interessant in combinatie met de vermenigvuldiging. Het zijn dan ook de matrixprodukten, hun ontstaanswijze en hun eigenschappen, die de eerste beginselen van de matrixrekening uitmaken (§ 2).

Dit alles heeft, hoe eenvoudig ook, iets boeiends, niet alleen omdat we getallen zien samenspelen in teamverband, maar meer nog omdat dit rekenspel in grote trekken de gewone regels volgt.

---

[1]) Dit artikel is een afgesloten deel van een ontworpen boekje over matrixrekening en lineaire algebra, dat met gewoon-"ordelijk opgesteld"-rekenwerk begint, tot in details laat zien hoe goed dit loopt, en meer abstracte begrippen laat wachten tot zij nuttig en nodig zijn. Een op dit artikel aansluitend deel, waarin o.m. de rang, kwadratische vormen en vergelijkingenstelsels aan de orde komen, zal verschijnen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.

Vandaar ook het verruimende èn praktische van de matrixrekening.

Het uiterlijk aspect van matrices is zeer gevariëerd. De getallen — ook wel elementen genoemd — kunnen onbepaalden zijn, letters, formules, in het bijzonder letters met indices. De gebruikelijke haken hebben geen andere betekenis dan aan te geven dat de elementen bijeenhoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-a & 1+a \\ a & -a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wat betreft het aantal rijen en kolommen bestaat er geen enkele beperking. In het algemene geval — m rijen en n kolommen — spreken we van een $m \times n$-matrix of matrix van het „formaat" $m \times n$. Als speciale gevallen noemen we: de vierkante matrices ($m = n$), de rijen ($m = 1$), de kolommen ($n = 1$) en tenslotte de individuele getallen („formaat 1×1") waarbij haken uiteraard overbodig zijn.

§ 2. *Vermenigvuldiging van matrices.*

De door Cayley gegeven vermenigvuldigingsregel voor matrices komt vanzelf te voorschijn als we ordelijk en efficiënt te werk gaan. Nemen we een schoolvoorbeeld als uitgangspunt:

een winkel, die 9 stuks van een artikel à *f* 5 verkoopt, ontvangt *f* 45.

Deze berekening kan in diverse opzichten meervoudig worden gemaakt. Laat, om te beginnen, de inkoopsprijs *f* 3 zijn geweest, en de onkosten per eenheid *f* 1. Dan zijn er drie vermenigvuldigingen tegelijk, die we samenvatten tot:

2.1 $$9(5 \quad 3 \quad 1) = (45 \quad 27 \quad 9)$$

Laat vervolgens de winkel behoren tot een filiaalbedrijf van vijf winkels. Dan produceren de aldaar verkochte vijf hoeveelheden, mits *onder* elkaar gezet, een overzichtelijk bedragentableau:

2.2 $$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} (5 \quad 3 \quad 1) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & 9 \\ 35 & 21 & 7 \\ 10 & 6 & 2 \\ 15 & 9 & 3 \\ 15 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Laat het tenslotte niet om één maar om vier artikelen gaan. Dan passen hun respectieve vijftallen hoeveelheden in kolommen,

naast elkaar; en hun prijs-drietallen in rijen, onder elkaar:

2.3 $$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Dit stel gegevens produceert vier tableaux die zich laten samenvatten:

2.4 $$\begin{pmatrix} 45 & 27 & 9 \\ 35 & 21 & 7 \\ 10 & 6 & 2 \\ 15 & 9 & 3 \\ 15 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & 14 & 14 \\ 21 & 14 & 14 \\ 12 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 9 & 0 \\ 16 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 15 & 3 \\ 16 & 20 & 4 \\ 8 & 10 & 2 \\ 8 & 10 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 96 & 65 & 26 \\ 88 & 63 & 25 \\ 36 & 27 & 12 \\ 32 & 24 & 7 \\ 31 & 21 & 8 \end{pmatrix} = P$$

Deze matrix P — produkt van A en B — leidt ons nu tot *Cayley's rij-kolom-regel.* Zie bijv. wat voor winkel 2 aan onkosten is samengevat: 25 in *rij* 2 en *kolom* 3. Dit element van P vloeit voort uit *rij* 2 van A, (7 7 8 4), en *kolom* 3 van B, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: vermenigvuldig hun overeenkomstige elementen en tel op

$$7.1 + 7.2 + 8.0 + 4.1 = 25$$

Algemeen:
een $k \times l$-matrix A en een $l \times m$-matrix B produceren een $k \times m$-matrix P waarin p_{ij}, het element in rij i en kolom j, voortvloeit uit rij i van A en kolom j van B:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il}b_{lj} = p_{ij}$$

2.5 $$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & & & & a_{il} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & b_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{lj} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

De matrix P heet het produkt van A en B; we schrijven $P = AB$ (soms ook wel $A \cdot B$[1])). Blijkbaar moeten A en B aaneenpassen qua aantal kolommen resp. rijen; anders vormen zij geen produkt AB. De twee eenvoudigste produkttypen zijn al naar voren gekomen:

2.2 toont een „kolom.rij-produkt"; formaten: 5×1 en $1 \times 3 \rightarrow 5 \times 3$.

2.5 wordt — als we alles wegdenken behalve de aangeduide rij en kolom — een „rij.kolom-produkt"; formaten $1 \times l$ en $l \times 1 \rightarrow 1 \times 1$.

In het laatste geval moeten rij en kolom aaneenpassen, d.w.z. evenveel elementen bevatten; hun produkt is een 1×1-matrix d.i. een getal.
Het winkelvoorbeeld toont hoe A en B in een concrete situatie vanzelf aaneenpassen. Terwille van een goede samenhang zullen we herhaaldelijk op dit voorbeeld terugkomen, o.a. om de totalen, die in P zijn samengevat, te gebruiken.

Opgaven

a. Hoe veranderen de matrices A, B en P bij elk der volgende wijzigingen?
   1. De verliesgevende winkel 3 (verkoop $36 < 27 + 12$) wordt onderaan gezet.
   2. De omzet van het winstgevende artikel 3 wordt verdubbeld.
   3. Alle onkosten worden tot de helft gereduceerd.

b. Te bepalen een kolom en een rij die bij vermenigvuldiging $\begin{pmatrix} 7 & -91 & 42 \\ -4 & 52 & -24 \end{pmatrix}$ geven.

Alvorens algemene eigenschappen aan de orde te stellen beschouwen we enkele doorzichtige gevallen, waarbij de linker dan wel rechter factor veel nullen bevat. Het effect van de matrixvermenigvuldiging is dan gemakkelijk te overzien.

Stel bijv. dat we prijzen niet in guldens maar in cents willen uitdrukken, zodat de prijzenmatrix B moet veranderen in een met $100 \times$ zo grote elementen. Dan kunnen we schrijven:

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 100 \\ 300 & 200 & 200 \\ 200 & 100 & 0 \\ 400 & 500 & 100 \end{pmatrix} \text{ en}$$

[1]) Niet $A \times B$; het $\times$-teken heeft nl. ook andere betekenissen (al dadelijk in „formaat $m \times n$").

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 100 \\ 300 & 200 & 200 \\ 200 & 100 & 0 \\ 400 & 500 & 100 \end{pmatrix}$$

We zien hier vierkante matrices waarin uitsluitend de naar rechts dalende diagonaal [1]) bezet is met een getal $\neq 0$, de factor in kwestie. Dergelijke matrices heten „scalair" (brengen B's elementen op andere schaal). In formules spaart het ruimte als men een scalaire vermenigvuldiging weergeeft door de factor zelf:

$$s\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ i.p.v. } \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

Nemen we $s = 1$ dan worden de scalaire matrices „neutraal" d.w.z. zonder effect, zoals het getal 1 in $1.a = a = a.1$. Deze „éénmatrices" plegen te worden aangeduid met I[2]); is het formaat van belang dan schrijven we I_n: een $n \times n$-matrix met n énen langs de diagonaal, en elders nullen.

Als de énen niet alle langs de diagonaal zijn opgesteld, maar toch wel zo dat elke rij en kolom er precies één bevat, dan volgt een spel van verwisselingen. Wanneer we bijv. kolom 4 in I_4 vooropzetten, dan geeft de aldus verkregen matrix Q:

$$2.6 \qquad AQ = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hier wordt in de hoeveelhedenmatrix A niets veranderd behalve de volgorde der *kolommen*: artikel 4 komt voorop te staan. Dit maakt natuurlijk niets uit voor de berekening der verkoop-, inkoop- en onkostentotalen, behalve dat artikel 4 ook in de prijzenmatrix voorop moet komen; en dat betekent een verandering van de volgorde der *rijen*:

$$2.7 \qquad Q'B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1]) Deze „hoofddiagonaal" heet gewoonlijk diagonaal zonder meer.
[2]) Ook wel met E, vooral in Duitse literatuur.

Dat de verwisselingen in dit geval volkomen onbelangrijk zijn moet intussen niet de indruk wekken dat „verwisselaars" als Q en Q' vrijwel gelijk staan met I-matrices. Er zijn nl. onderwerpen waar het juist om verwisselingen gaat, zodat verwisselaars daar juist als zodanig te pas komen. Ter illustratie volgen hier de zes verschillende 3×3-verwisselaars (I telt hierbij mee als de neutrale):

2.8 $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elke onderlinge vermenigvuldiging (kwadratering inbegrepen) levert blijkbaar weer een van de zes op. Zij vormen een gesloten geheel (een zg. „groep").

Naast de verwisselaars noemen we nog twee andere met I-matrices verwante matrixtypen. Ook deze hebben een effect dat gemakkelijk is te overzien en wel, naar gelang zij links of rechts staan, op rijen resp. kolommen.

Het „diagonale" type heeft een vermenigvuldigend effect:

2.9 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 40 & 50 & 60 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -3 \\ 4 & 50 & -6 \\ 7 & 80 & -9 \end{pmatrix}$$

Als de diagonale elementen alle gelijk zijn dan wordt de vermenigvuldiging scalair; zoals we reeds zagen worden rijen en kolommen dan gelijkelijk vermenigvuldigd.

Het „bijteller" type, I-matrix met extra element, heeft een additief, „bijtellend" effect:

2.10 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 74 & 85 & 96 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 4 & 5 & 56 \\ 7 & 8 & 89 \end{pmatrix}$$

Aldus kan een veelvoud van een rij resp. kolom bij elke andere worden opgeteld (of afgetrokken). Ook is het mogelijk enige dergelijke bewerkingen tegelijk uit te voeren (zie opgave g).
Aan deze verschillende „elementaire matrixtypen" wordt vaak meer aandacht besteed [1]). Hier dienen zij alleen voor een eerste oriëntering omtrent matrixprodukten.

Opgaven

c. Vermenigvuldig de produktmatrices 2.6 en 2.7; is hun produkt $= P$?
d. Bepaal de verwisselaars R en R' die — anders dan Q en Q' — de volgorde van A's kolommen en B's rijen geheel omkeren. Is $R = R'$?
e. Ga bij K, L, M, N en N' van 2.8 na dat 3 van de 5 het kwadraat I hebben en dat 9 van de 10 tweetallen bij vermenigvuldiging tweeërlei uitkomst geven, al naar de volgorde.
f. Ga na dat er een bijteller bestaat die uit elk der uitkomsten 2.10 de oorspronkelijke matrix terugvormt.
g. Vervang in 2.10 de enkelvoudige bijteller door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

h. De bijtellers van opgave g zijn elk het produkt van twee enkelvoudige.
i. Bepaal $\begin{pmatrix} a & 1-b & 1-a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 1-d & 1-c \\ 1 & 0 & -1 \\ c & -d & 1-c \end{pmatrix}$.
Neem speciaal $c = a, d = b$ (kwadratering).
Neem speciaal $c = b, d = a$ (neutralisering).
Welk geval geeft kwadraten die I zijn?
j. Breid de groep der 6 matrices 2.8 uit door toevoeging van de diagonale matrix $(-1, -1, 1)$ en alle produkten die daaruit door onderlinge vermenigvuldigingen voortvloeien; ga na dat de uitgebreide groep 24 matrices omvat.
k. Een $n \times n$-matrix A die met een diagonale matrix D, waarin $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ alle verschillen, verwisselbaar is, $AD = DA$, is zelf diagonaal. Zie 2.9.
Een $n \times n$-matrix die verwisselbaar is met elke andere $n \times n$-matrix is scalair.

[1]) Zie bijv. A. Heyting, Matrices en Determinanten, 1946 (Servire reeks).

Matrixvermenigvuldiging heeft twee eigenaardigheden die we van getallen niet gewend zijn:

1e AB en BA verschillen in het algemeen;
2e AB kan O (een nullenmatrix) zijn ook al zijn A en $B \neq O$.
Op het laatste komen we aan het slot van deze paragraaf terug, eerst houden we ons bezig met de factorenvolgorde.

De ongelijkheid van AB en BA — zie 2.9 en 2.10 — wordt minder verwonderlijk wanneer men bedenkt dat naast AB geen produkt BA bestaat tenzij A en B in *beide* volgorden aaneenpassen (formaat $m \times n$ en $n \times m$). De produkten zijn dan vierkant ($m \times m$ resp. $n \times n$):

2.11

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{pmatrix}$$

Alleen bij vierkante matrices van gelijk formaat is $AB = BA$ niet bij voorbaat uitgesloten. En inderdaad bestaan dergelijke paren; laat bijv. A of B scalair zijn, of neem Q en Q' van 2.6 en 2.7 die elkaar blijken te neutraliseren

2.12 $$QQ' = I \qquad Q'Q = I$$

De gevallen van verwisselbaarheid blijven echter uitzonderingen. Toch moet er blijkens ons winkelvoorbeeld een soort algemene verwisselbaarheid bestaan. We zijn immers begonnen met „hoeveelheid × prijs", maar kunnen evengoed beginnen met „prijs × hoeveelheid". Dan dienen we de prijzen op te stellen naar het voorbeeld der hoeveelheden (nl. per artikel in een kolom, en deze kolommen naast elkaar), en omgekeerd. Doen we dit dan verkrijgen we

2.13 $$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 88 & 36 & 32 & 31 \\ 65 & 63 & 27 & 24 & 21 \\ 26 & 25 & 12 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Hier staan *niet* de matrices B, A en AB van 2.3 en 2.4 maar hun „gespiegelden" of „getransponeerden": de rijen en kolommen van B, A en AB zijn als kolommen resp. rijen geschreven. Deze getransponeerden worden met B', A' en $(AB)'$ aangeduid [1]):

2.14 $$B' \cdot A' = (AB)'$$

Dit resultaat geldt algemeen, immers rij j van B' levert met kolom i van A' hetzelfde produktelement p_{ij} als in 2.5 werd gevonden, alleen staat het nu op gespiegelde plaats. In woorden luidt 2.14:

> Het produkt der getransponeerde factoren, in omgekeerde volgorde, is de getransponeerde van het produkt.

Opgaven

1. Bepaal de volgende produkten en ga na dat de factoren verwisselbaar zijn

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-b & b\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sa+t & sb\\ sc & sd+t\end{pmatrix}.$$

Het laatste omvat de vier voorafgaande als bijzondere gevallen.

m. Kies een 5×5-verwisselaar R en bepaal RR'. Wat is de algemene regel?

n. Een vierkante matrix A geeft $(A^2)' = (A')^2$.

o. Als $A^2 = A$ dan behoeft nog niet $AA' = A$; ga dit na met behulp van $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\ 1{,}6 & 0{,}8\end{pmatrix}$.
Volgt uit $AA' = A$ wel $A^2 = A$? Geef een 2×2-matrix A (zonder nullen) zó dat $AA' = A$.

Het is zeer wel mogelijk dat de getransponeerde overeenstemt met de oorspronkelijke matrix, $A' = A$. Zulke „symmetrische" matrices zijn hun eigen spiegelbeeld t.o.v. de diagonaal. Natuurlijk behoren alle diagonale matrices er toe; maar ook bijv. de matrices K, L en M van 2.8, die tevens tonen dat de producten niet symmetrisch behoeven te zijn: $KL = N$, $LK = N'$, enz.

Bij elke $m\times n$ matrix A kunnen we de producten AA' en $A'A$ vormen (2.11 $B = A'$). Daarvoor geldt $(AA')' = (A')'A' = AA'$, d.w.z. AA' is symmetrisch, en $A'A$ evengoed. Alleen bij bepaalde

---

[1]) Een andere veel gebruikte notatie is B^T, enz. (^{T} van „transpositie").

soorten matrices geldt $AA' = A'A$, zie bijv. 2.12; in het algemeen is er verschil:

2.15 $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Tenslotte noemen we een grootheid die bij AB en BA (aangenomen dat beide bestaan) wèl steeds gelijk is: het „spoor" d.i. de som der diagonale elementen van een vierkante matrix. In de diagonaal van AB resp. BA staan nl. precies alle produkten $a_{ij}b_{ji}$, en dat geeft, met een voor zichzelf sprekende afkorting:

2.16 Als AB en BA beide bestaan dan geldt sp AB = sp BA.

In het bijzonder vinden we:

2.17 sp AA' = sp $A'A$ = som van A's gekwadrateerde elementen.

Opgaven

p. Geef een niet-symmetrische A (zonder nullen) zó dat $AA' = A'A$

q. Zij A een $n \times 2$-matrix van énen, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & n \\ n & n-1 & . & . & 1 \end{pmatrix}$.
Bepaal sp AB en sp BA.

r. Als AB een I-matrix oplevert en BA eveneens dan zijn A en B vierkant.

De mogelijkheid van $AB = O$ bij matrices A en B die zelf géén van beide O-matrices zijn blijkt al uit een eenvoudig voorbeeld:

2.18 $$(88 \ \ 63 \ \ 25) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Hier staat, zie 2.4, dat winkel 2 winst noch verlies geeft. Op zichzelf heeft zo'n nulprodukt dus niets onaannemelijks. Maar toch noopt deze afwijking van wat we bij getallen gewend zijn tot voorzichtigheid bij bepaalde herleidingen (§ 4). Zelfs kwadratering kan O opleveren:

2.19 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uit $A^2 = O$ mogen we dus niet tot $A = O$ concluderen.
Bij de produkten AA' en $A'A$ zien we iets anders. Hun diagonale elementen bevatten alle kwadraten $a_{ij}{}^2$, zodat zij alleen O zijn als alle $a_{ij} = 0$:

2.20 Uit $AA' = O$ of $A'A = O$ volgt $A = O$.

De hoofdzaken der produkten van twee matrices zijn hiermee voldoende toegelicht.

Opgaven

s. Als $\begin{pmatrix}1 & b\\ a & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & q\\ p & r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ dan is $ab = c$ en $\begin{pmatrix}1 & b\\ a & c\end{pmatrix}$ een kolom.rij-produkt; $\begin{pmatrix}1 & q\\ p & r\end{pmatrix}$ ook?

t. Voor $\begin{pmatrix}8 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 7\\ 4 & 9 & 2\end{pmatrix}$ [1] $= T$, $\begin{pmatrix}3 & -4 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 4 & -3\end{pmatrix} = M$ en

$\begin{pmatrix}a+3 & a-4 & a+1\\ a-2 & a & a+2\\ a-1 & a+4 & a-3\end{pmatrix} = M(a)$ geldt $\quad T = M(5)$, $M = M(0)$

1e $TM = M^2 = M(a)M$; 2e $M(a)M(b) = M(1)M(ab)$;
3e $M(a)M(b) = 24I$ als $ab = 8/3$.

u. Voor $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix} = D(a)$ en $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ a^2 & 2a & 1\end{pmatrix} = E(a)$

geldt $\begin{cases} D(a)D(b) = D(ab)\\ E(a)E(b) = E(a+b)\\ D(a)E(b) = E(ab)D(a)\end{cases}$

v. Gegeven a, b en c; waaraan moeten x, y en z voldoen opdat

$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 1e bij factorverwisseling gelijk blijft; 2e aan I gelijk is?

§ 3 *Optelling en onderverdeling.*

Het optellen van matrices is al terloops te pas gekomen bij de tableaux van 2.4. Hier volgt een definitie:

Matrices A en B van gelijk formaat hebben een som $S = A + B$ van hetzelfde formaat waarin het element in rij i en kolom j is bepaald door $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

---

[1]) Dit is een „tovervierkant"; dergelijke uit 1 t/m n^2 gevormde vierkanten met langs elke rij, kolom en diagonaal hetzelfde totaal hebben vanouds op de verbeelding gewerkt.

Kennelijk doet de volgorde van A en B nu niet terzake. Duidelijk is ook dat een optelling meer dan twee matrices kan omvatten.

3.1 $A+B=B+A \quad (A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$

Verder heeft elke matrix A een „tegengestelde" $-A$, met tegengestelde elementen, zodat $A+(-A)=O$. Zoals gebruikelijk schrijven we $A-B$ voor $A+(-B)$: aftrekken is optellen van het tegengestelde.

Al deze eigenschappen liggen direct voor de hand omdat matrixoptelling niets anders is dan een stel getaloptellingen naast elkaar. Eerst in samenhang met de vermenigvuldiging krijgt de matrixoptelling meer inhoud.

Opgaven

a. Geef voorbeelden van 2×2-matrices A (zonder nullen) waarvoor $A^2=-A$.

b. Ga na dat $A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ en $B=I-A$ kolom. rij-produkten zijn en dat $A^2=A$, $B^2=B$ en $AB=O=BA$.

Een optelling van rijen, gepaard met vermenigvuldiging, vinden we bij produkten van de gedaante $a'B$, waarin a' een rij voorstelt[1]). Zo geeft het winkelvoorbeeld 2.4, als we de hoeveelhedenmatrix A beperken tot rij 2 (winkel 2):

$$(7\ 7\ 8\ 4)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 7(5\ 3\ 1)+7(3\ 2\ 2)+8(2\ 1\ 0)+4(4\ 5\ 1)=(88\ 63\ 25)$$

Aldus blijkt rij 2 van AB een optelling van rijen van B, elk vermenigvuldigd met een factor, — kort gezegd: een *combinatie* van rijen B. Analoog bij een produkt Ab; nemen we de „onkosten" in het winkelvoorbeeld dan blijkt de betreffende kolom van AB een *combinatie* van kolommen van A.

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot 2+\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot 0+\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 1=\begin{pmatrix} 26 \\ 25 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

[1]) In het algemeen zullen we een kolom aanduiden door een kleine letter en bij een rij het transpositieteken toevoegen. Omgekeerd spaart men verticale ruimte door een kolom te schrijven als getransponeerde rij: (1 2 0 1)'; de aanduiding {1 2 0 1} – zie o.a. A. C. Aitken, Determinants and Matrices – wordt hier vermeden.

Op deze manier kan AB rij voor rij worden bepaald, of wel kolom voor kolom. Beide mogelijkheden laten zich overzichtelijk weergeven door A uit te schrijven als k aparte rijen, en B als m aparte kolommen:

3.2 $$AB = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_k' \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_1'B \\ a_2'B \\ \vdots \\ a_k'B \end{pmatrix} \qquad AB = A(b_1 b_2 \dots b_m) = (Ab_1 Ab_2 \dots Ab_m)$$

Dit uitschrijven als rijen en kolommen maakt ook de rij.kolomregel zichtbaar

3.3 $$AB = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_k' \end{pmatrix} (b_1 b_2 \dots b_m) = \begin{pmatrix} a_1'b_1 & a_1'b_2 & \dots & a_1'b_m \\ a_2'b_1 & a_2'b_2 & \dots & a_2'b_m \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_k'b_1 & a_k'b_2 & \dots & a_k'b_m \end{pmatrix}$$

Men ziet hier matrices en delen van matrices samenwerken volgens regels die oorspronkelijk voor de elementen werden gegeven: $A(b_1 b_2 \dots b_m) = (Ab_1 Ab_2 \dots Ab_m)$ bijv. lijkt een getal.rij-produkt zoals $9(5\ 3\ 1) = (45\ 27\ 9)$; en 3.3 heeft het uiterlijk van een kolom.rij-produkt.

Duidelijk is ook dat men A's rijen en B's kolommen willekeurig tot horizontale resp. verticale stroken kan bundelen; neem bijv.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_i' \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{i+1}' \\ a_k' \end{pmatrix} \text{ zodat } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

en op analoge manier bijv. $B = (B_1 B_2 B_3)$, dan geldt

3.4 $$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (B_1 B_2 B_3) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \end{pmatrix}$$

Elke deelmatrix van AB is blijkbaar een produkt.
Schrijft men daarentegen A als kolommen en B als — evenveel — rijen dan komt er

3.5 $$AB = (a_1 a_2 \dots a_l) \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_l' \end{pmatrix} = a_1b_1' + a_2b_2' + \dots + a_lb_l'$$

Deze manier van uitwerken tot een som van kolom.rij-produkten werd in § 2 (de vier tableaux) als uitgangspunt genomen.

Uiterlijk is 3.5 een rij.kolom-produkt. Ook hier kan men bundelen, mits op overeenkomstige wijze; neem bijv. $A_1 = (a_1 \dots a_i)$,

$A_2 = (a_{i+1} \ldots a_l)$ en dan bij B's rijen *dezelfde* indeling:

$$3.6 \qquad AB = (A_1 A_2) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

Toepassing van beide uitwerkingen tegelijk geeft onderverdeling in „blokken". Uit deze „grote elementen" kan men het produkt AB bloksgewijs bepalen; zie bijv.

$$3.7 \qquad AB = \left(\begin{array}{c|cc|c} 9 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 96 & 65 & 26 \\ 88 & 63 & 25 \\ \hline 36 & 27 & 12 \\ 32 & 24 & 7 \\ \hline 31 & 21 & 8 \end{array}\right)$$

In A verticaal en in B horizontaal lopende deellijnen hebben overeenkomstige posities [1]).

Met letteraanduidingen wordt 3.7

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ P_{31} & P_{32} \end{pmatrix}$$

Bijv. $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 5 + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 4$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 32 \end{pmatrix} = P_{21}$$

Evenzo voor de vijf overige delen van P.
Bij transpositie gaan ook de deelmatrices in hun getransponeerden over zodat bijv. $B'_{11}A'_{21} + B'_{21}A'_{22} + B'_{31}A'_{23} = P'_{21}$.
Dit rekenen met blokmatrices komt vaak te pas. Niet alleen omdat de getallen in matrices soms groepsgewijs bijeenhoren (zoals in statistische tabellen), maar ook om zuiver rekentechnische redenen. Het spaart nl. schrijfwerk en bevordert de overzichtelijkheid. Men werkt dan ook geregeld met betrekkingen als:

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

Ook kan het praktisch zijn een optelling als produkt te schrijven:

---

[1]) Zij passen in het winkelvoorbeeld bij dezelfde artikelindeling: 1 (2 3) 4.

3.8 $$D + E = (D\ \ E)\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} = (I_m\ I_m)\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

In het bijzonder kunnen we aldus de kolommen dan wel rijen van een matrix sommeren door middel van een passende kolom of rij énen. Schrijven we hiervoor e en e' dan wordt bijv. $e'A$ een korte notatie voor de som van A's rijen. Zo geeft het winkelvoorbeeld totalen voor de vijf winkels tezamen:

3.9 $$e'A = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (24\ 21\ 26\ 12)$$

Men kan $e'A$ ook de rij der kolomtotalen noemen.
Een passende énen*kolom* geeft: Ae = som der kolommen = kolom der rijtotalen. Is A een rij getallen, $a' = (a_1\, a_2 \ldots a_n)$ dan is $a'e = e'a$ hun som $\sum_{i=1}^{n} a_i$.
Handige rekenhulpmiddelen zijn ook e_i en e_i': de passende nullenkolom resp. -rij met 1 op de i-de plaats. Zij geven bijv.
Ae_i = kolom i van A, $e_i'A$ = rij i van A [1]).

Opgaven

c. Werk $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ uit volgens de gewone (rij.kolom-) methode, en volgens de kolom.rij-methode; de laatste herleidt het produkt tot een som $A + B = I$, met matrices als beschouwd in opgave b (neem $a = 3$).
d. Met B als in opgave 2.q te bepalen Be, $e'B$, $e'(Be)$ en $(e'B)e$.
e. Als A en B willekeurige $m \times n$ resp. $p \times n$-matrices zijn, dan bij $W = \begin{pmatrix} I_m & A & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & B & I_p \end{pmatrix}$ Z te bepalen zó dat $WZ = I$. Wat is dan ZW? Vgl. opgave 2.f.

Tot slot zij vermeld dat transpositie van een matrix A de tegengestelde kan opleveren, $A' = -A$; een eenvoudig voorbeeld geeft
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Deze „uitkiezers" e_i en e_i' kunnen elk element a_{ij} van A aanduiden, nl. door $e_i'Ae_j$; in beginsel is gebruik der a_{ij} dus onnodig. Zie E. Bodewig, Matrix Calculus, blz. 9.

Dergelijke „scheefsymmetrische" matrices zijn — evenals de symmetrische — vierkant; hun diagonale elementen zijn 0 (tegengesteld aan zichzelf). Dat dit matrixtype eigenaardigheden heeft blijkt al in het eenvoudigste geval. Bij formaat 2×2 vinden we nl. altijd een negatief kwadraat, tegengesteld aan dat van een scalaire matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$$

Terwijl getallen met een negatief kwadraat sinds lang als „imaginair' zijn gediskwalificeerd zien we hier dezelfde situatie zonder ook maar iets onreëels. Deze eenvoudige matrices bieden dan ook de mogelijkheid spelenderwijs met complexe getallen vertrouwd te raken (zie opg. h en i).

Intussen is het nu vóór alles nodig de regels voor het optellen en vermenigvuldigen van matrices te completeren.

Opgaven

f. Ga na dat bij $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ (beide symmetrisch) AB en BA scheefsymmetrisch zijn, en dat $BA = (AB)' = -AB$ (tegengestelde produkten).

g. Elke vierkante matrix A is de som van een symmetrische nl. $\frac{1}{2}(A + A')$ en een scheefsymmetrische $\frac{1}{2}(A - A')$. Bepaal beide bij $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Ga na dat een symmetrische $n \times n$-matrix bepaald wordt door $1 + 2 + \ldots + n$ elementen, een scheefsymmetrische door $1 + 2 + \ldots + (n - 1)$.

h. Beschouw 2×2-matrices $aI + bJ$ en $cI + dJ$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ga na dat hun som en hun produkt (onafhankelijk van de volgorde) van ditzelfde type is; en evenzo gevormd als de som en het produkt van de complexe getallen $a + bi$ en $c + di$; speciaal $J^2 = -I$ zoals $i^2 = -1$. Bepaal som en produkt van $aI + bJ$ en $(aI + bJ)'$.

i. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ en $L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

(i als in opgave h) vormen met hun tegengestelden een groep van acht; vgl. 2.8. Stel elk ook voor door een 4×4-matrix met uitsluitend de reële elementen 0, 1 en -1.

§ 4 *De belangrijkste rekenregels.*

We beschouwen een matrixprodukt dat de winsten der vijf winkels specificeert.

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 96 & 65 & 26 \\ 88 & 63 & 25 \\ 36 & 27 & 12 \\ 32 & 24 & 7 \\ 31 & 21 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 5 \\ 25 & 0 \\ 9 & -3 \\ 8 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Achter de matrix AB met de verkoop-, inkoop- en onkostentotalen per winkel staat een matrix C die de gewenste salderingen tot stand brengt. Het produkt geeft in de eerste kolom voor elke winkel de brutowinst (= verkoop — inkoop), en in de tweede kolom de nettowinst (= verkoop — inkoop — onkosten). Het is een 5×2-matrix die in twee stappen uit de aaneenpassende A, B en C is afgeleid.

Bruto- en nettowinst kunnen echter ook eerst per artikeleenheid worden bepaald; vermenigvuldiging met de hoeveelheden moet dan dezelfde einduitkomst geven:

$$BC = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 5 \\ 25 & 0 \\ 9 & -3 \\ 8 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Dit voorbeeld doet een wetmatigheid vermoeden:

Voor elk drietal matrices A, B, C met aaneenpassende formaten $k\times l$, $l\times m$, $m\times n$ geldt

4.1 $$(AB)C = A(BC)$$

Inderdaad hebben matrixprodukten deze „associatieve eigenschap". We gaan dit eerst na voor het eenvoudige geval waarbij A een rij en C een kolom is:

4.2 $$(a'B)c = a'(Bc) \qquad a' = (a_1 \dots a_l), \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Hier staat links een rij-kolom-produkt, dus een getal; evenals rechts. Hun gelijkheid wordt duidelijk als we letten op één element van B

bijv. b_{ij} in rij i en kolom j. In de rij $a'B$ staat b_{ij}, vermenigvuldigd met a_i, in de j-de component; in $(a'B)c$ staat b_{ij} dus in het produkt $a_i b_{ij} c_j$. Maar $a'(Bc)$ bevat ditzelfde produkt. Blijkbaar hebben $(a'B)c$ en $a'(Bc)$ dezelfde samenstelling.

Met 4.2 is tevens 4.1 aangetoond. Als we nl. voor a' een rij van A nemen en voor c een kolom van C dan is $(a'B)c$ een element van $(AB)C$ en $a'(Bc)$ het overeenkomstige van $A(BC)$. Dus zijn $(AB)C$ en $A(BC)$ element voor element gelijk.

Deze fundamentele eigenschap maakt matrices vrijwel even hanteerbaar als getallen. Zo kunnen we de uitkomst van $(AB)C$ en $A(BC)$ eenvoudig door ABC weergeven; en ook bij méér factoren kunnen de haken vervallen, want uit 4.1 volgt gemakkelijk dat $A(BCD) = (AB)(CD) = (ABC)D = A(BC)D$; enz. Een eenvoudig voorbeeld geven de matrices van 2.6 en 2.7: $(AQ)(Q'B) = A(QQ')B = AB$, want $QQ' = I$ (zie 2.12).

Vermenigvuldiging en optelling zijn verbonden door de twee regels

$$4.3 \qquad AB + AD = A(B + D) \qquad AB + EB = (A + E)B$$

Elk volgt uit 4.1; er staat nl. $A(I\ \ I) \cdot \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = A.(I\ \ I)\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ resp. $(A\ \ E) \cdot \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} B = (A\ \ E)\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} \cdot B$.

In het winkelvoorbeeld zou D een 4×3-matrix met prijsverhogingen kunnen zijn; en E een 5×4-matrix met extra hoeveelheden, bijv. verkocht in een tweede periode.

Beide regels gelden natuurlijk evengoed met —tekens (neem $-D$ en $-E$ i.p.v. D en E). Het letten op de volgorde (A vóór, B achter) wordt al gauw een goede gewoonte. Attentie is echter nodig voor de mogelijkheid dat A noch B een nulmatrix is, terwijl toch

$AB = O$, en dus $AD = A(B + D)$ resp. $EB = (A + E)B$.

Zie bijv. bij $AB = (1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$(1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hier staat $AX = AY$ terwijl $X \neq Y$, $UB = VB$ terwijl $U \neq V$. Dus (n.b.): „wegdelen" van A uit $AX = AY$ of van B uit $UB = VB$ is ongeoorloofd.

Dit is niet zo vreemd als het lijkt, want bij getallen bestaat een soortgelijk verbod: uit $0 \cdot x = 0 \cdot y$ volgt *niet* $x = y$.

Opgaven

a. Als $AB = C$, en B's rijtotalen zijn alle 1, dan stemmen die van A en C overeen.

b. Bij $A = \begin{pmatrix} 10 & 19 & 31 \\ 7 & 13 & 20 \end{pmatrix}$ te bepalen $B = Ae(e'Ae)^{-1}e'A$, een kolom.rij-produkt dat A benadert. Bij *elke* matrix A (met $e'Ae \neq 0$) heeft B dezelfde kolom- en rijtotalen als A.

c. De vereenvoudiging van $\frac{1961}{1517}$ tot $\frac{53.37}{41.37} = \frac{53}{41}$ laat zich weergeven door

$$\begin{pmatrix}1961\\1517\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1517\\444\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}444\\185\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}444\\185\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}185\\74\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 4\\7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}185\\74\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 4\\7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}74\\37\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}22 & 9\\17 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}74\\37\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22 & 9\\17 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.\,37 = \begin{pmatrix}53\\41\end{pmatrix}.\,37.$$

Ga na dat $\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{22}{17}$ (voorste kolommen) van weerszijden tot $\frac{53}{41}$ naderen.

d. Bepaal als in opgave c drie breuken die naderen tot het getal pi: $\frac{3141593}{1000000}$.

e. Toon aan: 1e $(ABC)' = C'B'A'$; 2e (ABC vierkant) sp ABC $=$ sp $BCA =$ sp CAB; 3e sp $(A'A \cdot B'B) > 0$ tenzij $AB' = O$.

f. Uit $A'AX = A'AY$ volgt $AX = AY$; dus uit $A'A$ kan A' worden weggedeeld. (Wenk: gebruik 2.20, met $A(X - Y)$ i.p.v. A).

g. Uitwerken van $a'x\,.\,y'b - a'y\,.\,x'b = a'(xy' - yx')b$ geeft

$$\textstyle\sum_1^n a_i x_i \cdot \sum_1^n b_i y_i - \sum_1^n a_i y_i \cdot \sum_1^n b_i x_i = \sum_{i>j} (a_i b_j - b_i a_j)(x_i y_j - y_i x_j)$$

h. Uit voorgaande identiteit van Lagrange volgt $a'a\,.\,b'b \geqq (a'b)^2$, de ongelijkheid van Cauchy.

De zes verwisselaars van 2.8 toonden reeds hoe bij bepaalde onderwerpen uitsluitend matrices van vast vierkant formaat $n \times n$ voorkomen. Dergelijke matrices — vaak genoemd „van de orde n" — gelijken in bijzondere mate op getallen omdat hun machten A^2, $AA^2 = A^2A = A^3$, enz. bestaan en de bekende regels $A^mA^n = A^nA^m = A^{m+n}$ volgen. Zolang geen tweede matrix B komt storen met $AB \neq BA$ loopt alles gewoon, zodat welbekende „merkwaardige produkten" geldig blijken:

$$(I + A)^2 = (I + A)I + (I + A)A = I + 2A + A^2$$

4.4 $(I - A)(I + A) = I - A^2$, of algemener

$$(I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}) = I - A^m$$

Hierbij kunnen bepaalde soorten matrices bijzonderheden vertonen:

1e. A kan „idempotent" zijn d.w.z. $A^2 = A$; dus ook als $m > 2$: $A^m = A^{m-2}A^2 = A^{m-1} = \ldots = A$. Terwijl bij getallen alleen 1 en 0 idempotent zijn, bestaan er bij matrices naast I en O vele andere idempotenten [1]). Voor elk geldt

$A(I - A) = O = (I - A)A$ en $(I - A)^2 = I - 2A + A = I - A$

Blijkbaar is ook $I - A = B$ een idempotent:

4.5 Idempotenten vormen supplementaire tweetallen A, B waarvoor geldt

$$A + B = I \text{ en } AB = O = BA$$

Eenvoudige voorbeelden zijn: I en O, of paren als in opg. 3.b, bijv.:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2e. A kan „nilpotent" zijn d.w.z. $A^m = O$ voor zekere m; als bovendien $A^{m-1} \neq O$ dan heet A nilpotent van de graad m.

Voorbeelden met $m = 2$ staan in 2.19; een voorbeeld met $m = 3$ is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kennelijk geldt, zie 4.4, $(I - A)\ (I + A + \ldots + A^{m-1}) = I$.

Opgaven

i. Als $AB = sB$ (A dus vierkant) dan is $A^nB = s^nB$,
   bijv. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

j. Als $AB = BC$ (A en C vierkant) dan is $A^nB = BC^n$.
   Bij scalaire C krijgt men opgave *i*.

k. Als $AB = BA$ dan is $A^mB^n = B^nA^m$, en gelden de gewone merkwaardige produkten:
   $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $\quad (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

l. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$

   Ga na dat $A^3 = -sA$, waarin $s = a^2 + b^2 + c^2$.
   Toon aan dat $(I - A)\ (I + (1 + s)^{-1}(A + A^2)) = I$.

---

[1]) Zij komen te pas bij het oplossen van vergelijkingenstelsels.

m. Als A idempotent is dan geldt $(I - 2A)^2 = I$.
Omgekeerd: gegeven een X zó dat $X^2 = I$ (opgave 2.*i*) dan zijn $\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}X$ en $\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}X$ supplementaire idempotenten.

n. Gegeven: de $m \times m$-matrix A met $a_{12} = a_{23} = \ldots = a_{m-1m} = 1$ en elders 0, resp. de verwisselaar die uit A ontstaat door ook $a_{m1} = 1$ te maken. Bepaal hun $2^e, \ldots m^e$ machten, de bijbehorende factoren 4.4, met hun produkt.

Tenslotte kan een praktisch vraagstuk duidelijk maken hoe een oneindige optelling $I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ („meetkundige reeks") te pas kan komen.
Gegeven: een fabriek kan drie produkten 1, 2, 3 maken, maar het fabricageproces is zodanig dat daarbij weer zekere hoeveelheden van elk worden verbruikt: per eenheid van produkt i zijn a_{ij} eenheden van j nodig, zoals aangegeven in

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}0 \end{pmatrix}$$

Is de produktie bijv. $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$ dan het is intern verbruik $A \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ en de afzet $\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$.
Vraag: welke produktie geeft $\begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$ afzet; of algemener $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$?
Oplossing. Het produceren van b geeft een afzettekort Ab; door Ab méér te produceren drukt men het tekort tot A^2b; weer A^2b erbij, enz. Vier ophogingen geven

$$b \quad + \quad Ab \quad + \quad A^2b \quad + \quad A^3b \quad + \quad A^4b$$

4.6 $$\begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7{,}0 \\ 8{,}1 \\ 5{,}9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}10 \\ 1{,}99 \\ 2{,}21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}630 \\ 0{,}641 \\ 0{,}619 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1890 \\ 0{,}1879 \\ 0{,}1901 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34{,}9190 \\ 19{,}9189 \\ 44{,}9191 \end{pmatrix}$$

Dit loopt uit op $\begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 45 \end{pmatrix}$ welke produktie inderdaad $\begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$ afzet blijkt te geven.

Natuurlijk hadden we de gezochte produktie, stel x, kunnen vinden uit $x - Ax = b$ d.w.z. uit

4.7 $$(I - A)x = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 1{,}0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ 0{,}9x_2 - 0{,}2x_3 \\ -0{,}2x_1 - 0{,}1x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Hier staan drie vergelijkingen met x_1, x_2 en x_3 als onbekenden. Oplossing geeft de vereiste produktie: $x_1 = 35$, $x_2 = 20$, $x_3 = 45$. In de praktijk komen veel grotere aantallen vergelijkingen en onbekenden voor. De oplossing met de reeks 4.6 verdient dan overweging mits de getallen in de matrix A klein zijn.

Het belang van kleine a_{ij} is ook al in het gegeven voorbeeld te zien. De afzet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vraagt nl. de produktie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}09 \\ 0{,}09 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}027 \\ 0{,}027 \\ 0{,}027 \end{pmatrix} +$$

Deze korte optelling geeft de uitkomsten al op 1 % nauwkeurig [1]). Waren de elementen van A echter bijv. 3 maal zo groot dan zou de berekening slechts zeer langzaam vorderen.

Opgaven

o. Bereken de termen van 4.6, elk uit de vorige.

p. Bepaal de produktie die vereist is om de afzet $\begin{pmatrix} 77 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ te bereiken.

q. Wat valt te verstaan onder een afzet $\begin{pmatrix} 30 \\ -1 \\ 41 \end{pmatrix}$? Welke produktie behoort daarbij?

r. Voor idempotente A en $-1 < r < 1$ komt $(I - rA)\,(I + rA + r^2A + \ldots + r^{m-1}A)$ willekeurig dicht bij I, als m maar groot genoeg is. Ga dit na en ook dat $(I - rA)\left(I + \dfrac{r}{1-r}A\right) = I$ voor *elke* $r \neq 1$.

---

[1]) Er ontstaan – toevallig bij deze A – meetkundige reeksen met reden 0,3 en som 1,429.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Leibniz, die een universeel geleerde was, is het meest bekend gebleven als wiskundige en filosoof (monaden-leer). De wiskunde-studie begon hij pas op latere leeftijd. Hij is op 1 juli 1646 te Leipzig geboren, studeerde er rechten, promoveerde in 1666 te Altdorf en was tot 1673 in dienst van de keurvorst van Mainz. Tijdens een diplomatieke reis leerde hij in 1672 te Parijs Huygens kennen, die hem op zijn verzoek in wiskunde onderwees. Begin 1673 was hij in Londen waar hij met verschillende vooraanstaande wiskundigen, onder wie Newton, kennis maakte. Hij toonde een zelfontworpen rekenmachine. Vóór zijn vertrek werd hij benoemd tot lid der Royal Society. Hij vond al de eenvoudige reeks: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

Terug in Parijs bleef hij tot 1676 in contact met Huygens, studeerde wiskunde, en vond in 1675 de differentiaalrekening. Vanaf 1676 was hij te Hannover in dienst van de hertogen van Brunswijk, als bibliothecaris en historicus, tot zijn overlijden te Hannover op 14 november 1716, nu dus 250 jaar geleden.

In 1682 werd hij medewerker aan het nieuwe tijdschrift *Acta Eruditorum*. Hierin publiceerde hij in mei 1684 een artikel van 6 pagina's *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (nieuwe methode ter bepaling van maxima, minima en raaklijnen, ook voor gebroken of irrationale grootheden, en een bijzondere rekenwijze voor dit alles). Hierin komen de regels voor het differentiëren van een produkt, quotiënt en macht (ook met negatieve en gebroken exponent) voor, het stijgen of dalen der raaklijn naargelang de afgeleide positief of negatief is, maximum en minimum van een functie, en de betekenis der tweede afgeleide.

Vier jaar later verschijnt een artikel *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (over verborgen meetkunde en een analyse van ondeelbare en oneindige grootheden) waarin een beschouwing over „transcendente" grootheden voorkomt en het $\int$-teken. Leibniz spreekt nog van „calculus summatorius" (sommatierekening) maar nam later de in 1690 door Jakob Bernoulli voorgestelde term „calculus integralis" over.

Het is wel bekend, dat er tussen Newton en Leibniz een priori-

teitsstrijd over de ontdekking van de infinitesimaalrekening geweest is. Newton, die zijn fluxierekening al in 1665–1666 gevonden had (nu dus 300 jaar geleden) beweerde in zijn *Philosophiae naturalis principia mathematica* (wiskundige beginselen der natuurfilosofie) (1687), dat Leibniz' ideeën van hem waren. In 1704 publiceerde hij voor het eerst iets over zijn fluxierekening. Leibniz merkte in 1705 — terecht — op, dat Newton's publikatie pas na de zijne kwam. De kwestie leidde tenslotte tot een klacht van Leibniz bij de Royal Society. Een commissie daaruit deed, zonder Leibniz nader te horen of te informeren, in 1712 uitspraak ten gunste van Newton. Thans kunnen we als zeker stellen, dat Leibniz zijn ontdekking onafhankelijk van Newton gedaan heeft. En we mogen er dan nog bijvoegen dat op 't vasteland Leibniz' ontdekking — in tegenstelling tot Newton's fluxierekening in Engeland — in het begin der 18e eeuw al zeer ver ontwikkeld was. Onze huidige infinitesimaalrekening danden we dus aan Leibniz.

Uit nagelaten geschriften is gebleken hoezeer Leibniz zich beziggehouden heeft met de vernieuwing der formele logica; het gestelde programma heeft hij slechts ten dele kunnen uitvoeren.

In 1700 werd hij de eerste voorzitter der door hem opgerichte Berlijnse Academie van wetenschappen.

Leibniz gaf de wiskunde een van haar meest gebruikte termen, nml. „functie". Hij voerde determinanten in bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen, en was de eerste, die over het tweetallig stelsel schreef. Verder voerde hij de punt in als vermenigvuldigingsteken, de dubbele punt als deelteken (in het reeds genoemde *Nova methodus* van 1684), alsook de thans gebruikelijke schrijfwijze voor een evenredigheid.

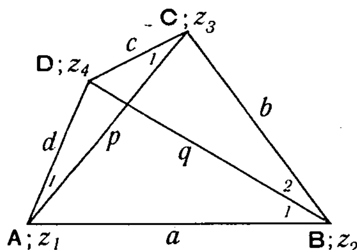
A. J. E. M. Smeur

KORREL CXXXV
(Nieuw bewijs van een bekende stelling)

Stelling. Als om een vierhoek *geen* cirkel beschreven kan worden, is de som van de produkten van de overstaande zijden groter dan het produkt van de diagonalen.

P. Wijdenes geeft een planimetrisch bewijs (vlakke meetkunde voor voortgezette studie; blz. 179, 180). Molenbroek geeft een bewijs met behulp van inversie (Vlakke meetkunde, blz. 242).

Het volgende bewijs maakt gebruik van complexe getallen.



We beschouwen de hoekpunten van $ABCD$ als de beeldpunten van de complexe getallen z_1, z_2, z_3 en z_4. Stel verder: $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; $AC = p$ en $BD = q$.

We beschouwen nu de dubbelverhoudingen:

$$U = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} : \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}; \qquad V = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_4} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4}$$

Dan is $U + V = 1$; $\quad |U| = \dfrac{bd}{pq}$; $\quad |V| = \dfrac{ac}{pq}$;

$$1 = |U + V| \leqq |U| + |V| = \frac{bd + ac}{pq}.$$

Het gelijkteken geldt alleen, als $\arg U = \arg V = 0$ is. Nu is $\arg U = \angle B_2 - \angle A_1$; $\arg V = \angle C_1 - \angle B_1$, zodat $\angle A_1 = \angle B_2$ en $\angle B_1 = \angle C_1$. In dat geval is $ABCD$ een koordenvierhoek.

Eindhoven — P. Bronkhorst

PAPY, MATHEMATIQUE MODERNE II

door

Dr. P. G. J. Vredenduin

(Oosterbeek)

Het eerste deel van dit boek [1]) heeft in ons land veel belangstelling gewekt. Ik vermoed daarom, dat velen nieuwsgierig zullen zijn naar de inhoud van het thans verschenen tweede deel. In deel I heeft men kennis gemaakt met een veelheid van voor de moderne wiskunde essentiële onderwerpen. In deel II wordt met strakke lijn een stuk wiskunde opgebouwd.

De auteur stelt zich allereerst als doel de theorie van het reële getal en van de lineaire ruimte te ontwikkelen op wetenschappelijk geheel verantwoorde wijze. Als men in het voorbericht leest, dat het boek bestemd is voor leerlingen van 13 jaar, zal men zich afvragen, hoe de realisering van dit doel mogelijk is.

Het middel, dat bij de ontwikkeling van de theorie een centrale rol speelt, is de getallenlijn. Kies op een lijn twee verschillende punten (vectoren), $\vec{0}$ en $\vec{v}$, en beschouw de verzameling vectoren

$$\ldots, \overrightarrow{\bar{3}v}, \overrightarrow{\bar{2}v}, \overrightarrow{\bar{1}v}, \vec{0}, \vec{v}, \overrightarrow{2v}, \overrightarrow{3v}, \ldots.$$

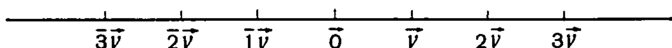


fig. 1

We weten reeds uit deel I, dat de punten op een lijn en dus ook deze vectoren zich laten ordenen. Verder kennen we uit deel I de vector-optelling en weten we, dat de vectoren een groep t.a.v. de optelling vormen. Nu wordt bewezen, dat de vectoren een geordende groep t.a.v. de optelling vormen (dus dat bovendien $\vec{x} \leqq \vec{y} \rightarrow \vec{x} + \vec{z} \leqq \vec{y} + \vec{z}$).

Verder kennen we uit deel I de ring van de gehele getallen. De ordening van de gehele getallen is daar echter nog niet gedefinieerd.

[1]) Voor een bespreking van de inhoud van deel I, zie Euclides **39**, **VIII**, p. 237–246 (Een opzienbarend boek).

We definiëren de ordening van de gehele getallen nu zo, dat per definitie $z_1 \leqq z_2$, als $z_1\vec{v} \leqq z_2\vec{v}$. De gehele getallen blijken dan eveneens een geordende groep t.a.v. de optelling te vormen.

De beide in de vorige alinea's vermelde groepen blijken isomorf te zijn. Dat wil zeggen, dat er een bijectie bestaat (d.i. een eenduidige afbeelding op) tussen de gehele getallen z en de vectoren $z\vec{v}$, die de eigenschap heeft, dat de ordening bewaard blijft en de som van twee getallen afgebeeld wordt op de som van de overeenkomstige vectoren.

We kunnen ook kortweg zeggen, dat we er nu in geslaagd zijn op de rechte lijn een schaal aan te brengen, waarbij de gehele getallen staan. Zo is op geheel verantwoorde en niet intuïtief gefundeerde manier een getallenlijn verkregen, aan punten waarvan gehele getallen zijn toegevoegd.

De verder gevolgde procedure bestaat uit het uitbreiden van de schaal. Aan steeds meer punten op de rechte lijn worden getallen toegevoegd, tot dat een bijectie tussen de getallen en alle punten verkregen is. Om te garanderen, dat op de duur de schaal overal zal doordringen, is het nodig eerst het axioma van Archimedes te accepteren.

De eerste stap hierbij is het onderverdelen van de schaal door tussen elk paar opvolgende punten het midden te nemen. Dit geschiedt door gebruik te maken van de stelling, dat in een parallellogram de diagonalen elkaar middendoor delen (fig. 2). Deze verdeling wordt steeds verder voortgezet.

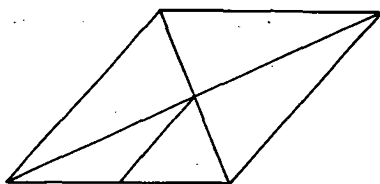


fig. 2

Om nu aan de deelpunten getallen te kunnen toevoegen, worden nieuwe getallen ingevoerd, de zogenaamde binaire getallen. Aanvankelijk bestaan deze uit, wat men zou kunnen noemen, eindigende duale breuken. Voorlopig zijn het echter nog geen breuken; het zijn slechts getallen, die opgebouwd zijn door te beginnen met een geheel getal, daarachter een komma te zetten en daarachter een eindigende serie tekens 0 en 1. B.v. 5,01101 of $\overline{14}$,1101.

Niet aan elk punt blijkt op deze manier een getal toegevoegd te kunnen worden. Zo is er geen getal, dat hoort bij het punt $\vec{x}$, waarvoor $3\vec{x} = \vec{v}$. Wel blijkt het nu mogelijk aan elk getal, waaraan nog geen binair getal toegevoegd is, toe te voegen een „getal" van de vorm z,100110111 . . ., dat opgebouwd is door achter een geheel getal z een oneindige serie tekens 0 en 1 te plaatsen. Deze nieuwe getallen noemen we niet-eindigende binaire getallen. Aan elk getal van de rechte lijn kan zo een al of niet eindigend binair getal toegevoegd worden.

Wordt nu omgekeerd langs deze weg ook aan elk al of niet eindigend binair getal een punt van de lijn toegevoegd? Dit is pas zeker, nadat we het continuïteitsaxioma ingevoerd hebben, dus aannemen, dat elke inkrimpende serie intervallen een niet lege doorsnede heeft.

Ten slotte krijgen de binaire getallen een andere naam; ze worden reële getallen genoemd. En zo hebben we dan een bijectie verkregen tussen de reële getallen en de punten (vectoren) van de rechte lijn.

De reële getallenrechte is hiermee tot stand gekomen. Totnogtoe is er echter nog alleen sprake van een bijectie tussen de punten van de rechte lijn en de reële getallen. Er is nog geen volgorde, geen optelling en geen vermenigvuldiging van reële getallen gedefinieerd en de overeenkomstige isomorfie is nog een toekomstdroom.

De ordening van reële getallen is eenvoudig tot stand te brengen. Deze wordt gedefinieerd conform de ordening van de eraan toegevoegde punten op de rechte lijn. En ook de optelling van reële getallen wordt gedefinieerd conform de vectoroptelling van de eraan toegevoegde punten (vectoren) (fig. 3).

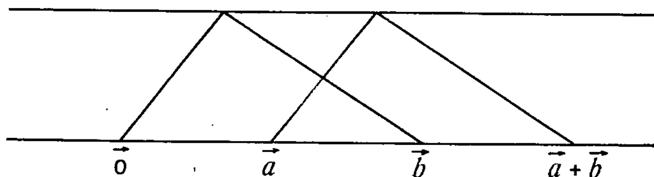


fig. 3

De vectoren enerzijds en de reële getallen anderzijds worden zo tot geordende groepen t.a.v. de optelling, die isomorf zijn.

Nu de vermenigvuldiging. Om deze te definiëren wordt gebruik gemaakt van homothetieën. Een homothetie op een rechte wordt als volgt gedefinieerd. Aan de punten van de lijn zijn de reële getallen toegevoegd. Deze toevoeging is bepaald door twee punten te

kiezen, waaraan de getallen 0 en 1 zijn toegevoegd. Laat c een willekeurig reëel getal zijn. Breng op de lijn nu een nieuwe schaal aan, waarbij 0 nog aan hetzelfde punt als te voren toegevoegd wordt, echter 1 aan het punt, waaraan te voren c werd toegevoegd. De homothetie h is nu een toevoeging van punt $\vec{p}$ aan punt $h(\vec{p})$ zo, dat bij punt $\vec{p}$ op de oude schaal hetzelfde getal staat als bij punt $h(\vec{p})$ op de nieuwe schaal.

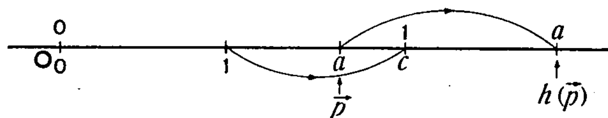


fig. 4

Het getal c heet de factor van de homothetie. Van belang is op te merken, dat de homothetie gedefinieerd is zonder ergens te spreken van vermenigvuldiging met een getal.

Nu bewijzen we: samenstelling van twee homothetieën levert weer een homothetie. En daarna volgt de definitie: als c_1 en c_2 de factoren zijn van de homothetieën h_1 en h_2, dan verstaan we onder $c_1 . c_2$ de factor van de homothetie $h_2 \circ h_1$. Eerst hierna is het mogelijk de scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal te definiëren.

De grondslag voor een verdere uitbouw van de theorie is hiermee gelegd. Enerzijds worden nu voor de vectoren de fundamentele eigenschappen bewezen, die de vectoren tot een eendimensionale lineaire ruimte maken. En anderzijds worden die eigenschappen van de reële getallen bewezen, die laten zien, dat deze getallen een geordend lichaam vormen. Hiermee is het in de aanhef vermelde doel bereikt en zijn we inmiddels op pag. 290 van het boek aangeland.

Zonder enige twijfel is op een fascinerende manier het reële getal hier tot stand gekomen. Ik vermoed, dat vrijwel elke wiskundeleraar na lezing van dit betoog zal ondervinden, dat zijn inzicht in deze materie verrijkt is. Wonderlijk is, dat de leerstof is voorgezet aan 13-jarige leerlingen (leerlingen van de vijfde, d.i. onze tweede, klasse). Door mevrouw Papy is de mogelijkheid getoetst deze stof werkelijk te onderwijzen en met positief resultaat. Wat niet wegneemt, dat ik helemaal niet wil propageren, dat we hier met ideale leerstof voor onze tweede klassen te maken zouden hebben.

Over het resterende gedeelte van het boek, dat nog 144 pag. in beslag neemt, wil ik kort zijn. Aan de orde komen nog achtereen-

volgens de machtsverheffing met gehele exponenten en het deelprocédé, dat eenduidig bij a en b een paar getallen z en r levert, waarvoor $a = zb + r$, $0 \leqq r < b$ en z geheel is. Nu volgt, schrik niet, de definitie van een rationaal getal als quotiënt van twee gehele getallen en het bewijs, dat de rationale getallen een geordend lichaam vormen. De verzameling van de rationale getallen blijkt aftelbaar oneindig te zijn en overal dicht in de verzameling van de reëele getallen. De verzameling van de reëele getallen heeft een cardinaalgetal, dat groter is dan dat van de aftelbaar oneindige verzamelingen.

Ten slotte wordt nog ruim aandacht geschonken aan de beginselen van de tweedimensionale lineaire ruimte.

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE JAARVERGADERING 1966 VAN WIMECOS
op woensdag 28 december in „Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht

Aanvang 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld
2. Notulen van de algemene vergadering 1965
3. Jaarverslagen
3.1 van de secretaris*
3.2 van de penningmeester
3.3 van de kascommissie*
3.4 van de redactie van „Euclides"*
3.5 van de commissie voor de leesportefeuille*
4. Decharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie
5. Bestuursverkiezing
6. Voorstel van het bestuur tot vaststelling van de contributie voor 1967/1968 op ƒ 9.—.
7. Voordracht van Prof. dr. J. H. de Boer over „*Eliminatie*"

Pauze

8. Voordracht van de Heer W. J. Kniep over „*De Schotse methode van het wiskunde-onderwijs*"
9. Rondvraag
10. Sluiting

* Publikatie hiervan zal geschieden in het decembernummer van Euclides.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*" in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O op woensdag 30 november 1966: Prof. Dr. G. K. R. O. M. Braun: „*Meten in de fysica, wiskundig beschouwd*". Aanvang 20.00 uur.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

164. Schrijf de natuurlijke getallen door middel van hoogstens drie cijfers 4 en verder alleen mathematische symbolen. Het is gewenst de toelaatbare middelen iets nauwkeuriger te omschrijven. Toegelaten zijn de tekens voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken, het faculteitsteken en het sigmateken. Achter het sigmateken mogen niet voorkomen de tekencombinaties: $i + i$, $i - i$, $i \cdot i$, $\frac{i}{i}$, $i! + i!$, enz. (we zijn dus gedwongen daarvoor te schrijven $2i$, 0, i^2, 1, $2i!$, enz.). Verder is het gebruik van vrije variabelen verboden; we mogen dus b.v. 1 niet voorstellen door $\frac{a}{a}$. Er is natuurlijk niets tegen om op voorzichtige wijze andere symbolen toe te laten, zoals het teken $\binom{a}{b}$, het integraalteken e.d. Het is echter niet de bedoeling op listige wijze functies te definiëren (zoals de functie „entier van") en daarvan gebruik te maken, want dan is het hek van de dam. Gevraagd wordt bij 1 te beginnen en te zien, hoever men komt.

165. Verdeel een vierkant in een minimaal aantal scherphoekige driehoeken. (B. Kootstra).

OPLOSSINGEN

162. Gevraagd werd, of het mogelijk is een venn-diagram te ontwerpen voor n verzamelingen door middel van n gesloten krommen, waarvan er geen drie door één punt gaan en die het vlak in precies 2^n delen verdelen.

Noem de verzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Elk deel correspondeert met wel of niet tot V_1 behoren, . . ., wel of niet tot V_n behoren. We kunnen nu elk deel representeren door een serie van n cijfers, die alle 0 of 1 zijn. Het i-de cijfer is een 0 of een 1 al naarmate het deel correspondeert met niet of wel tot V_i behoren.

We bewijzen nu de mogelijkheid van het gevraagde diagram met behulp van volledige inductie. Onderstel, dat voor k verzamelingen het diagram mogelijk is. We bewijzen, dat dan ook een diagram voor $k + 1$ verzamelingen mogelijk is. We moeten daartoe een gesloten kromme tekenen, die elk van de 2^k delen van het diagram in twee delen verdeelt. We beginnen in het gebied 00 . . . 0. Telkens als we een grens passeren, zal precies één van de cijfers veranderen. We moeten dus

bewijzen, dat het mogelijk is telkens één van de cijfers te laten verspringen, zodat de cijfersuite alle 2^k waarden eenmaal aanneemt en ten slotte terugkeert bij 00 . . . 0.

Ook de juistheid hiervan bewijzen we met behulp van volledige inductie. Onderstel, dat het voor $k = p$ mogelijk is. We bewijzen, dat het dan ook voor $k = p + 1$ mogelijk is. Laat voor $k = p$ de suites achtereenvolgens zijn:

s_1: 0 0 0 0 . . . 0 0 0
s_2: 1 0 0 0 . . . 0 0 0
s_3: 1 1 0 0 . . . 0 0 0
. . .
s_{2^p-1}: 0 0 0 0 . . . 0 1 1
s_{2^p}: 0 0 0 0 . . . 0 0 1

We gaan nu als volgt te werk. Schrijf al deze suites opnieuw op, maar nu met als $p + 1^e$ cijfer een 0 erachter. Schrijf daaronder resp. $s_{2^p}, s_{2^p-1}, \ldots, s_3, s_2, s_1$, maar nu met als $p + 1^e$ cijfer een 1 erachter. De zo verkregen suite voldoet aan de vraag.

De mogelijkheid van het gevraagde diagram is hiermee aangetoond.

163. n Mensen zitten om een ronde tafel. Nummer 1 bezit een geheel aantal guldens, nummer 2 een gulden minder, nummer 3 weer een gulden minder, enz. Nummer 1 geeft 1 gulden aan nummer 2, nummer 2 geeft daarna 2 gulden aan nummer 3, nummer 3 geeft vervolgens 3 gulden aan nummer 4, enz. Steeds geeft iemand dus 1 gulden meer weg dan hij kreeg. Als dit niet meer mogelijk is, dan blijken er twee mensen naast elkaar te zitten, waarvan de een 4 maal zoveel guldens heeft dan de ander. Gevraagd: n.

Bezit nummer 1 k gulden, dan bezit nummer n dus $k - n + 1$ gulden. Het doorgeven gelukt niet meer, zodra iemand, die 0 gulden over heeft, van zijn voorganger geld krijgt. Dit zal het geval zijn, zodra nummer n geen geld meer heeft en van zijn buurman geld krijgt. Er is dan $n(k - n + 2) - 1$ keer geld doorgegeven. Dit is dus tevens het aantal guldens, dat nummer n dan van zijn buurman gekregen heeft. Nummer 1 heeft nog over $k - (k - n + 2)$ gulden. Dus is

$$n(k - n + 2) - 1 = 4k - 4(k - n + 2),$$
$$(k - n)n - 2n + 7 = 0.$$

Nu is $k \geqq n - 1$. Anderzijds blijkt uit bovenstaande gelijkheid, dat $k - n < 2$. We behoeven voor k dus alleen te proberen $n - 1$, n en $n + 1$. We vinden dan $n = 7$.